CONCOURS 1987 **OPTIONS M et P'**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre. Il est possible de traiter la partie III en admettant les résultats des deux parties précédentes.

NOTATION

- Pour tout réel x, on notera $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x ($E(x)$ est donc la partie entière de x).
  Si de plus x est strictement positif, $\ln x$ désignera le logarithme népérien de x.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, on dira que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n), et on notera $u_n = 0(v_n)$ si et seulement si :
  $$\exists A > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant N,\quad |u_n| \leqslant A|v_n|.$$
- z désigne un nombre complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre complexe $z^{(2^n)}$ sera noté simplement z^{2^n}.
- Si la série $\sum_{n\geqslant 0} z^{2^n}$ converge, sa somme sera notée $F(z)$.

I

1. Étudier la convergence de la suite $(z^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :
   a. $|z| < 1$.
   b. $|z| > 1$.
   c. $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. (Indication : on pourra montrer que la seule limite possible est 1 puis donner l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles la suite (z^{2^n}) converge.)

2. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} z^{2^n}$? Que vaut $F(0)$?

3. On définit la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par :
   $$\begin{cases} a_p = 1 & \text{si } \exists n \in \mathbb{N},\ p = 2^n \\ a_p = 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N},\ p \neq 2^n \end{cases}$$
   a. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3.
   b. Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\sum_{p=0}^{n} a_p$ en fonction de $\ln n$.
   Vérifier pour $n \in \{1, 2, 3\}$.

4. Dans la suite du problème x désignera une variable réelle.
   a. Rappeler les développements en série entière à l'origine des fonctions
   $\frac{1}{1-x}$ et $\ln(1-x)$. . En déduire celui des fonctions $\frac{\ln(1-x)}{1-x}$
   et $\frac{1}{(1-x)^2}$. Préciser leur rayon de convergence.
   b. En utilisant I.3.b donner le développement en série entière à l'origine de $\frac{F(x)}{1-x}$, puis celui de $\frac{F(x)-x}{1-x}$.

5. En déduire l'existence d'un réel K, dont on précisera la valeur, tel que :
   $$\forall x \in [0, 1[,\quad \left| F(x) - x - K(1-x) \sum_{n=2}^{+\infty} x^n \ln n \right| \leqslant x^2.$$

II

Pour tout $x \in]0, 1[$ on pose : $f(x) = -\ln(1-x) - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,dt$,

puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,dt$.

Tournez la page S. V. P.

1. *a.* Justifier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,dt$ pour tout $x \in]0, 1[$.

   b. Montrer que : $\forall x \in]0,1[, \forall n \geqslant 2, \quad \frac{x^n}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{x^t}{t}\,dt \leqslant \frac{x^{n-1}}{n-1}$.

   c. En déduire que :

   $$\forall x \in]0, 1[, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad 2 \leqslant p < q \Rightarrow 0 \leqslant f_p(x) - f_q(x) < \frac{1}{p}.$$

   d. En déduire que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $]0, 1[$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

   $$S_n = 1 + \sum_{p=2}^{n} \left[\frac{1}{p} + \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) \right] \qquad \text{et } S_1 = 1.$$

   a. Montrer que $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge. On appellera L sa limite.

   b. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \to 1^-} f_n(x) = S_n$.

3. En remarquant que :

   $\forall x \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f(x) - L| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - S_n| + |S_n - L|$,

   démontrer que

   $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = L.$$

   (On précisera clairement le choix fait pour n.)

4. *a.* Étudier la limite à gauche en 1 de :

   $$\ln(1 - x) - \ln[-\ln x].$$

   b. Justifier l'existence des intégrales impropres :

   $$\int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u}\,du \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

   c. À l'aide de II.3 et d'un changement de variable convenable dans l'intégrale qui définit f, établir l'égalité suivante :

   $$L = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u}\,du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

III

Pour tout réel X on pose :

$$g_n(X) = S_n - \frac{1}{2n} + \frac{X}{n^2}.$$

(La suite (S_n) et le réel L sont définis dans II.2.)

1. Trouver deux fonctions réelles, que l'on notera a et b, telles que :

   $$\forall X \in \mathbb{R}, \quad g_{n+1}(X) - g_n(X) = \frac{a(X)}{6n^3} - \frac{a(X)}{4n^4} + \frac{b(X)}{10n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

2. En déduire qu'on peut choisir $\alpha \in [0, 1]$ tel que :

   $$g_{n+1}(\alpha) - g_n(\alpha) = -\frac{1}{30n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

3. Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dominée par $\left(\frac{1}{n^5}\right)_{n \geqslant 1}$.

   a. Montrer que la somme de la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n x^n$ est une fonction bornée sur $[-1, 1]$.

   b. Établir l'existence d'un entier naturel N tel que :

   $$\forall n \geqslant N, \quad g_n(0) \leqslant L \leqslant g_n(\alpha).$$

   c. En déduire que : $L - S_n + \frac{1}{2n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   d. En se servant des résultats des questions I.4.*a* et III.3.*a*, prouver alors l'existence d'une fonction B bornée sur $]-1, 1[$ telle que :

   $$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n \geqslant 1} x^n \ln n = \frac{\ln(1 - x)}{x - 1} + \frac{Lx}{x - 1} + \frac{1}{2}\ln(1 - x) + B(x).$$

4. Donner un équivalent simple de la fonction F au voisinage de 1.

ECOLE SUPERIEURE d'INGENIEURS de MARSEILLE
Math 1
page 155
1987